1 Das Gefangenenproblem

Die Problemstellung sieht wie folgt aus: Es gibt n Gefangene, wobei n eine gerade Zahl sein soll. Diese Gefangenen haben alle Ausweise, die in n Fächer derart verteilt sind, dass in jedem Fach genau 1 Ausweis liegt. Jeder Gefangene darf alleine zu den Fächern gehen und $\frac{n}{2}$ beliebige Fächer öffnen, um zu sehen, ob sein Ausweis drinliegt.

Findet *jeder* Gefangene seinen Ausweis, so werden alle freigelassen. Findet aber ein einziger Gefangener seinen Ausweis nicht, so bleiben alle gefangen. Die Frage lautet nun: Welche Fächer sollten die Gefangenen am besten öffnen, um mit einer möglichst hohen Wahrscheinlichkeit ihren Ausweis zu finden?

1.1 Zufallsstrategie

Nun kann man sagen, dass jeder Gefangene eine Chance vn 50% hat, seinen Ausweis zu finden, da er ja genau die Hälfte aller Fächer öffnen und begutachten darf. Somit wäre die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Gefangene seinen Ausweis findet

$$P_{\text{Jeder findet seinen Ausweis}}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1.1}$$

Der Verlauf dieser Kurve ist in Abbildung 2 gezeigt. Man sieht sofort, dass bei dieser Zufallsstrategie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Häftlingen jeder seinen Ausweis findet, bei nicht einmal mehr 5% liegt.

1.2 Bessere Strategie

Nun könnte man argumentieren, dass man als einzelner – egal welche $\frac{n}{2}$ Fächer man öffnet – immer eine Erfolgaussicht von 50% hat. Das ist richtig, sofern man die Fächer zufällig wählt. Gibt es aber eine Strategie, bei der man von vornherein einige Felder ausschließen kann?

Betrachten wir dazu zunächst einige zugrundeliegende mathematische Tatsachen. Zunächst nummerieren wir die Gefangenen durch $(1, 2, \ldots, n)$, außerdem geben wir auch den Fächern Nummern $(1, 2, \ldots, n)$. Insgesamt betrachten wir also die Fächer 1 bis n, in denen die Ausweise 1 bis n liegen. Man kann sich leicht klarmachen, dass man letztendlich die Permutationen[1] der Menge der Zahlen 1 bis n betrachtet. In jedem Fach liegt nämlich genau ein Ausweis. Eine Beispielpermutation mit $n = 10$ könnte folgendermaßen aussehen:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 3 & 6 & 4 & 8 & 1 & 7 & 2 & 9 \end{array}$$

Letztendlich betrachten wir also eine bijektive Funktion $\pi(i) : [1, 2, \ldots, n] \to [1, 2, \ldots, n]$, die jedem Fach i den Ausweis mit der Nummer $\pi(i)$ zuordnet.

Es ist aber bekannt, dass Permutationen in der Zykelschreibweise[2] notiert werden können. Das obige Beispiel sähe in Zykelschreibweise folgendermaßen aus:

$$(5\ 4\ 6\ 8\ 7\ 1)\ (10\ 9\ 2)\ (3)$$

Anhand dieser Darstellung lässt sich leicht ersehen, dass beispielsweise für das Fach bzw. den Ausweis mit der Nummer 2 nur der Zykel (10 9 2) relevant ist. Die beiden anderen Zykel enthalten nämlich keine 2 und sind somit unwichtig.

Nun ist klar, dass in einem Zykel *immer* die gleichen Ausweis- wie Fächernummern vertreten sind. Hätten wir nun eine Strategie, die irrelevante Zykel von Haus aus ausschließt, so könnten wir das Problem eventuell effizienter lösen. Um irrelevante Zykel auszuschließen, geht man einfach folgendermaßen vor: Der Häftling mit Nummer n geht zum Fach mit der Nummer n. Ist sein Ausweis drin (also der Ausweis mit Nummer n), so hat er seinen Ausweis gefunden und ist fertig. Liegt ein anderer Ausweis mit Nummer n' drin, so geht der Gefangene zum Fach mit der Nummer n'. Liegt in diesem Fach sein Ausweis, so ist er fertig. Liegt in diesem Fach der Ausweis Nummer

[1] Siehe Wikipedia
[2] Siehe Fußnote 1

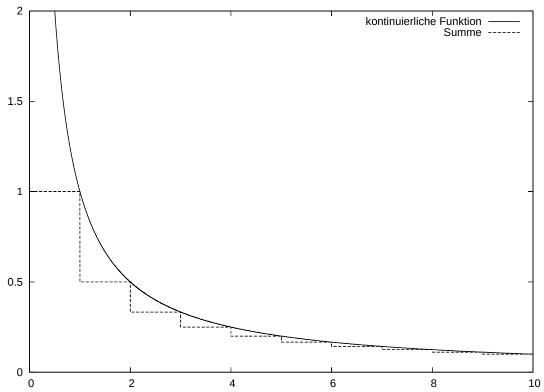

Abbildung 1: Summe und Integral

n'', so geht er zum Fach n'' und so fort. Diese Strategie entspricht dem "Durchwandern" durch den entsprechenden Zykel. Daher ist klar, dass man seinen Ausweis genau dann *sicher* findet, falls die Länge des jeweiligen Zykels kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ ist (da man ja $\frac{n}{2}$ Fächer öffnen darf). Ist die Länge des jeweiligen Zykels allerdings größer als $\frac{n}{2}$, so findet *sicher* jeder Gefangene, dessen Ausweis sich in diesem Zykel befindet, seinen Ausweis *nicht*.

Berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge des längsten Zykels kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ ist, so hat man die Erfolgswahrscheinlichkeit mit dieser Strategie.

$$P_{\text{Jeder findet seinen Ausweis}}(n) = P\left(|\text{Längster Zykel}| \leq \frac{n}{2}\right) \tag{1.2}$$
$$= 1 - P\left(|\text{Längster Zykel}| > \frac{n}{2}\right) \tag{1.3}$$
$$= 1 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} P\left(|\text{Längster Zykel}| = i\right) \tag{1.4}$$

Um diese entstandene Summe zu berechnen, betrachten wir zunächst ein einzelnes Summenglied. Um $P\left(|\text{Längster Zykel}| = i\right)$, $\frac{n}{2} < i \leq n$ zu berechnen, überlegt man sich, dass man für die längste Permutation (Länge i) i von n Elementen wählen kann. Dafür gibt es $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten. In diesem längsten Zykel der Länge i darf kein $\pi(x) = x^3$ sein, da sich sonst ein Zykel der Länge $i-1$ ergäbe. Also, gibt es $(i-1)!$ Möglichkeiten, diesen Zykel intern anzuordnen. Die restlichen $n-i$ Elemente kann man auf $(n-i)!$ Arten anordnen. Insgesamt gibt es $n!$ Permutationen. Als Einzelwahrscheinlichkeit ergibt sich also

$$P\left(|\text{Längster Zykel}| = i\right) = \frac{\binom{n}{i} \cdot (i-1)! \cdot (n-i)!}{n!} = \frac{1}{i}. \tag{1.5}$$

Daraus ergibt sich

$$P_{\text{Jeder findet seinen Ausweis}}(n) = 1 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{i}. \tag{1.6}$$

Wer sich ein wenig mit Analysis auskennt, wird feststellen, dass gilt: $\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{i} < \int_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{1}{x} dx$. Das ist in Abbildung 1 veranschaulicht und führt uns zu folgender Gleichung:

$$1 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{i} > 1 - \int_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{1}{x} dx = 1 - \ln n + \ln \frac{n}{2} \approx 0,307 \tag{1.7}$$

Somit sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mit dieser Strategie jeder seinen Ausweis findet – unabhängig von n (und daher insbesondere für $n \to \infty$) – immer mindestens 30% beträgt. Einen Vergleich mit der anderen Methode finden Sie in Abbildung 2.

[3] Solche Permutationen heißen Derangements. Siehe dazu Wikipedia

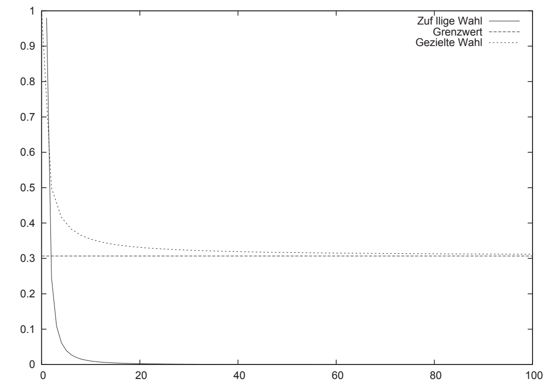

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeiten bei verschiedenen Strategien